XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CIAEM 2011
50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais

Henrique Rizek **Elias**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
henriquerizek@hotmail.com

Línlya Natássia Sachs Camerlengo de **Barbosa**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
linlyasachs@yahoo.com.br

Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
angelamarta@uel.br

Resumo

Diante dos altos índices de evasão em cursos de graduação em Matemática, apresentamos a hipótese desta realidade se dever, em partes, à difícil transição que ocorre entre o Ensino Médio, em que objetos matemáticos são descritos e o Ensino Superior, em que os objetos matemáticos são definidos e suas propriedades são construídas a partir destas definições. Utilizando Tall (2002), Domingos (2006) e outros teóricos do pensamento matemático avançado, verificamos como um conceito matemático, o conjunto dos números naturais, é apresentado em livros didáticos destinados tanto ao Ensino Médio quanto ao Ensino Superior. Para isso, selecionamos dois livros didáticos a fim de explicitar como um mesmo conceito pode ser abordado de maneiras diferentes, de acordo com o nível de ensino ao qual é destinado. Constatar esta ruptura significa, aos cursos de Licenciatura em Matemática, repensar seus currículos e considerar disciplinas que promovam uma ponte entre o ensino básico e o superior.

Palavras chave: Educação Matemática, Pensamento Matemático Elementar, Pensamento Matemático Avançado, Números Naturais, Livros Didáticos.

Introdução

Cursos de graduação em Matemática no Brasil apresentam índices alarmantes de evasão. Segundo Arruda, Carvalho, Passos e Silveira (2006, p.429), na Universidade Estadual de Londrina, durante o período de 1996 a 2004, o índice de evasão do curso de Bacharelado em Matemática atingiu 52,7%, enquanto Licenciatura em Matemática chegou a 46,9%. Já Adachi (2007, p.116) nos mostra que na Universidade Federal de Minas Gerais, o índice de estudantes ingressantes no ano de 2000 que se evadiram do curso de Matemática chegou a 57,4% no período noturno e 39,6% no diurno. A tese de doutorado de Souza (2008) traz um interessante histórico da evasão no curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná desde 1971 até 2005. Esses trabalhos, em diferentes universidades e diferentes períodos, nos mostram que grande parte dos estudantes que se matricularam em cursos de Matemática não deu continuidade a este curso.

São muitos os motivos pelos quais estudantes podem justificar a desistência de cursos de graduação. Assim como afirma Adachi (2007, p.5), pode-se perceber que as causas predominantes da evasão são de três ordens: uma relacionada aos estudantes, outra relacionada aos cursos e às instituições e a última de ordem mais conjuntural, relacionada ao mercado de trabalho, ao reconhecimento social da carreira escolhida, à qualidade do Ensino Básico, ao contexto socioeconômico e às políticas governamentais.

De maneira mais específica, cremos que um agravante para estes altos índices de evasão em cursos de graduação em Matemática e até mesmo um obstáculo encontrado por aqueles que dão continuidade no curso é a difícil transição da Educação Básica para o Ensino Superior, uma vez que este apresenta "um grau de complexidade acrescido, necessitando de recorrer a um pensamento matemático avançado" (Domingos, 2006, p.1).

Acreditamos que esta transição exija do estudante uma mudança na maneira de pensar a matemática e, assim como afirma Tall (2002), a passagem do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado envolve uma transição importante "da descrição à definição, do convencer ao provar de uma forma lógica baseada nestas definições" (p.20).

Neste sentido, o presente artigo tem como objetivo investigar como um conceito matemático, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, é apresentando em livros didáticos[1] destinados a ambos os momentos: Educação Básica, em que os objetos matemáticos são descritos, e Ensino Superior, em que os objetos matemáticos são definidos e suas propriedades são construídas a partir destas definições.

Para isto, selecionamos dois livros didáticos a fim de explicitar como um mesmo conceito pode ser abordado de maneiras diferentes, de acordo com o nível de ensino ao qual é destinado.

[1] Schubring (2003) sugere que o termo inglês *textbook* tem a vantagem de ser aplicado a todos os níveis de ensino, porém no Brasil não existe um termo correspondente e em geral o termo *livro didático* costuma ser utilizado para livros escolares de ensino básico, enquanto *livro-texto* costuma ser aplicado aos livros destinados ao ensino superior. Aqui, optamos por utilizar o termo *livro didático*, mesmo que este estudo seja para o ensino superior, pois o livro mantém a intenção didática quando usado em sala de aula, em conformidade com Ossenbach e Souza (2001, p.37 apud Bianchi, 2006) que afirmam que o livro didático é "mediador no processo formal de ensino, resultando em caráter de suporte do currículo escolar".

Defendemos aqui a ideia de que estudantes iniciantes na matemática avançada tenham dificuldades de se adaptarem à nova maneira de entender os objetos matemáticos, uma vez que não estão acostumados com as abstrações formais da graduação, o que pode ser um agravante aos índices alarmantes de evasão citados acima. Por isso, acreditamos que explicitar a diferença no tratamento de um mesmo objeto matemático nos momentos considerados seja importante para incluir este fato em estudos posteriores que busquem identificar os motivos dos altos índices de evasão em cursos de graduação em Matemática.

Considerações iniciais

Neste artigo, apresentaremos a ruptura entre a matemática elementar e a matemática avançada por meio de livros didáticos destinados a estes níveis de ensino, embora haja outras formas de mostrar tal ruptura como, por exemplo, fez Brandemberg (2010). Em pesquisas realizadas com estudantes que cursavam as disciplinas – que para Tall (1995) estão na transição da matemática elementar para a matemática avançada – de Estruturas Algébricas e Álgebra I na Universidade Federal do Pará em 2004 e na Universidade Federal do Rio Grande do Norte em 2007, respectivamente, o autor obteve como resposta às suas entrevistas declarações dos próprios estudantes de que tinham, em sua maioria, "dificuldades na aprendizagem do conteúdo devido ao alto grau de abstração presente em sua abordagem" (Brandemberg, 2010, p.15). De acordo com Brandemberg (2010), uma abordagem da álgebra eminentemente simbólica e formal "introduz uma gama de conceitos abstratos de forma súbita e sem conexões, contextualização ou relação com as representações que os estudantes já possuem de sua formação anterior" (Brandemberg, 2010, p.15). É justamente esta transição súbita e sem conexão entre a formação anterior dos estudantes e a forma como são abordados os conteúdos em cursos superiores em matemática que estamos chamando atenção em nosso trabalho.

Acreditamos que apresentar essa ruptura seja importante para que os cursos de matemática encarem este fato como um elemento a ser considerado quando se fala em currículo de matemática. Considerar este fato significa repensar abordagens utilizadas pelos professores, bem como rever os livros didáticos presentes na bibliografia de uma disciplina de um curso introdutório de matemática. Desta forma, a transição da matemática elementar para a matemática avançada será menos repentina e, possivelmente, menos penosa. Pois, no estudo de ideias abstratas, há sempre um grande perigo "em introduzi-las muito subitamente e sem uma base suficiente de exemplos para torná-las verossímeis ou naturais" (Herstein, 1970, p.I. apud Brandemberg, 2010, p.15).

Assim, cremos que os currículos de cursos de matemática deveriam, conforme aponta o documento do I Fórum Estadual dos Cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná (FELIMAT), realizado em 2002, contemplar os seguintes itens:

> • Os conteúdos da Ed. Básica devem ser também objeto de trabalho na Licenciatura, e, não devem ficar a cargo apenas do professor de Metodologia e Prática de Ensino, mas devem ser da responsabilidade dos professores de todas as disciplinas.
> • Ressalte-se a necessidade de se trabalhar nas disciplinas com atividades de investigação.
> • Quanto ao tratamento dos conteúdos: não é uma questão apenas de formalizar, mas de construir os conceitos que não foram construídos durante a Educação

> Básica. A partir de projetos investigativos, trabalhar com os conteúdos da Educação Básica que os alunos ainda não se apropriaram.
>
> (Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná, 2002)

Nesse sentido, considerar disciplinas que promovam uma ponte entre o ensino básico e o superior, formalizando conteúdos da Educação Básica e iniciando o estudante ao pensar, ao método dedutivo, característico da matemática, e à diferença entre definição e descrição.

Pensamento Matemático Avançado

Algumas são as teorias que tratam do desenvolvimento do pensamento matemático desde o nível elementar até o nível superior. Alguns autores se dedicam a este estudo, como, por exemplo, David Tall e Tommy Dreyfus.

Há diferentes abordagens com relação ao pensamento matemático avançado, não havendo, portanto, uma única forma de defini-lo.

Segundo Tall (1995), o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por um grande leque de atividades matemáticas para construir novas ideias que continuam a construir e estender um sistema sempre crescente de teoremas demonstrados.

Este autor afirma ainda que muitas destas atividades que ocorrem no ciclo de atividades do pensamento matemático avançado – que parte do ato criativo de considerar um problema no contexto da investigação em matemática, levando à formulação de conjecturas e o estágio final de refinamento e prova – possam ocorrer também na resolução de problemas da matemática elementar, mas a possibilidade da definição formal e dedução é um fator que distingue o pensamento matemática avançado (Tall, 2002, p.3).

Assim, tanto o pensamento matemático elementar quanto o avançado podem abarcar muitas destas atividades, incluindo um nível de justificação matemática, porém o pensamento matemático elementar, segundo Tall (2002, p.20), carece do processo de abstração formal e não inclui o aspecto final de precisão em seu modo mais formal.

Para Dreyfus (2002), o pensamento matemático avançado é um processo extremamente complexo, no qual uma série de processos interage de maneira intrincada. Para ele, os processos que estão presentes nos dois tipos de pensamento (elementar e avançado) são “os processos de *representação* e de *abstração*, sendo a principal diferença marcada pela forma como a complexidade que é exigida em cada um deles é abordada” (Domingos, 2006, p.5).

A transição do pensamento matemático elementar para o avançado

A transição entre o pensamento matemático elementar e o pensamento matemático avançado pode se dar de diversas formas. Para Tall (2002) esta transição deve-se prioritariamente à forma pela qual o conceito matemático é apresentado. Enquanto no pensamento matemático elementar o conceito é descrito, no pensamento matemático avançado o mesmo conceito é definido e apoiado em um método lógico-axiomático. Já para Dreyfus (2002), a transição pode estar também no modo de olhar para o conceito, isto é, de modo elementar ou de modo avançado. Desta forma, a transição está também na cognição do indivíduo; ele pode pensar sobre assuntos da matemática elementar utilizando pensamento matemático avançado e vice-versa.

Acreditamos que ocorram ambas as transições do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado: a individual e a da maneira pelo qual o conceito é apresentado – que chamaremos de transição curricular. Neste trabalho especificamente analisaremos, porém, apenas a transição curricular, pois nosso objetivo está em identificar a diferença do modo de se apresentar o mesmo conceito, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, em momentos curriculares diferentes, o da matemática elementar – no Ensino Médio – e o da matemática avançada – no Ensino Superior.

Para Tall (1995) esta transição, que chamamos de curricular, se dá no estudo da geometria euclidiana, da análise e da álgebra avançada, por introduzir um método lógico-axiomático em que os objetos matemáticos têm um novo estado cognitivo como conceitos definidos construídos a partir de definições verbais.

O conjunto dos números naturais

Os números naturais foram criados a partir da necessidade do homem de se fazer a contagem, seja do número de ovelhas do rebanho ou certa quantidade de um objeto qualquer. Desta forma, pode-se dizer que os números naturais surgiram a partir da percepção de objetos do mundo real e da ação sobre eles – o processo de contar. Consideramos, então, que a ideia de número natural não é independente da experiência, assim como afirma Caraça (1951):

> A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a ideia de número, para depois aplicar à pratica da contagem, é cómoda mas falsa.
>
> (Caraça, 1951, p.4)

Percebemos que as necessidades dos povos da antiguidade levaram à criação não só dos números naturais, mas também de outros números. Portanto, com a evolução da sociedade, houve o desenvolvimento da contagem. Podemos dizer que esta contagem se realizava por meio da correspondência biunívoca, ou seja, a cada objeto da coleção se fazia uma correspondência com um número da sucessão natural $1, 2, 3, 4, \ldots$.

Porém, em Matemática (formal, acadêmica, profissional), não é suficiente que se tenha apenas a ideia dos números naturais, é necessário construí-los. Assim, mais de uma construção foi feita. Uma delas, chamada *teoria ordinal*, baseia-se, de acordo com Giuseppe Peano, no fato de que os números naturais podem ser ordenados em uma sequência na qual cada elemento tem um sucessor bem definido. Peano "admite três conceitos primitivos: *número natural*, *zero e sucessor*, relacionados entre si por cinco axiomas" (Millies & Coelho, 2001, p.178). Outra fundamentação seria "construir uma *teoria cardinal*, isto é, formalizar a idéia intuitiva – que foi também a primeira a ser concebida – de que o número expressa quantidade" (Millies & Coelho, 2001, p.178). Esta construção associa cada número natural ao cardinal de um conjunto, compondo assim o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e, pelas propriedades de conjuntos, deduzem-se as propriedades de $\mathbb{N}$ e as operações fundamentais.

É justamente neste ponto que o presente artigo deseja focar. Acreditamos que, enquanto na matemática elementar – no Ensino Médio - é feita a descrição do conjunto dos números naturais, apresentando apenas a noção do que é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e de suas propriedades, na matemática avançada – no Ensino Superior – é feita a construção deste conceito e de suas propriedades, exigindo do estudante um pensamento matemático avançado. Esta modificação na maneira de tratar o objeto matemático – transição curricular - exige do estudante iniciante em matemática avançada uma mudança na maneira de encarar esses objetos matemáticos, exige um novo estado cognitivo.

Para verificar esta transição curricular tal qual definimos, veremos como livros didáticos de Matemática destinados ao Ensino Médio e ao Ensino Superior abordam o conceito em questão – o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais – verificando se há diferença na maneira de tratá-lo.

Os livros didáticos

O livro didático do Ensino Médio escolhido para análise foi *Matemática Ensino Médio* das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. A escolha por este livro se deve à sua presença na lista do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio de 2009 (Brasil, 2008). Já o livro didático do Ensino Superior escolhido foi *Fundamentação da Matemática Elementar* dos autores Moema de Sá Carvalho, Maria Laura M. Leite Lopes e José Carlos de Melo Souza. Este livro está presente como bibliografia básica ou complementar de algumas disciplinas de cursos superiores em Matemática, tais como Pré-Cálculo e Fundamentos da Matemática.

Nossa analise será fundamentada em Tall (2002), quando considera que na matemática elementar os objetos são descritos e esta descrição é feita a partir de experiências com o objeto, enquanto que na matemática avançada os objetos são definidos e suas propriedades são construídas a partir destas definições. Assim, pretendemos nesta análise verificar como o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais está abordado: descrito ou definido.

i) Smole, K. S. & Diniz, M. I. (2003) *Matemática Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais aparece no volume 1, página 9. O livro faz uma breve apresentação do surgimento dos números naturais, relacionando-o à ordenação ou à contagem:

> Embora as formas de representar quantidades tenham sido diferentes ao longo da história, todas surgiram da necessidade de ordenar ou contar certo número de objetos utilizando a sequência $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Chamamos esses números de números naturais.
>
> (Smole & Diniz, 2003, p.9)

Apresenta também uma tabela com diferentes sistemas de numeração:

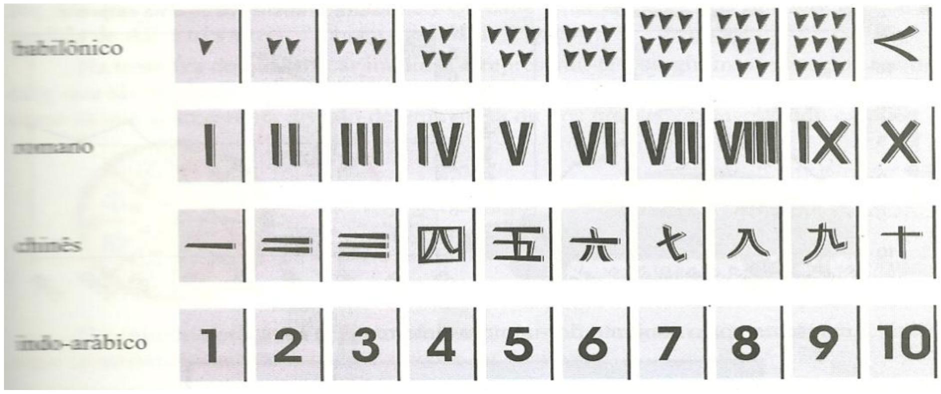

Figura 1. Sistemas de numeração desde a Antiguidade

Verificamos certa superficialidade na associação entre os números naturais e a contagem ou ordenação, deixando de explorar a ideia de correspondência entre os objetos e os números naturais, dando importância aos diferentes sistemas de numeração utilizados desde a Antiguidade e fazendo-o de forma vaga, apenas como uma curiosidade[2].

O livro comenta o surgimento do zero: "(...) foi com o surgimento do sistema indo-arábico que o zero passou a ser utilizado, para atender, principalmente, a exigências relacionadas ao valor posicional na numeração escrita." (Smole & Diniz, 2003, p.9), sem entrar em maiores detalhes e sem falar sobre a possibilidade dele estar presente ou não no conjunto dos números naturais. Se examinarmos diversos livros de Matemática, veremos que ora o zero faz parte do conjunto dos números naturais, ora não, o que se deve à conveniência da escolha. Lima (1982) mostra que geralmente em estudos de Álgebra o zero está presente no conjunto, pois permite considerar a existência do elemento neutro da adição neste conjunto, enquanto em Análise, nos estudos sobre séries e sequências, a presença do zero complicaria a determinação da posição do termo x_n, que ao invés de ser o n-ésimo termo, seria o (n+1)-ésimo termo.

Em seguida no livro didático, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é descrito: "Atualmente, o conjunto dos números naturais é representado por $\mathbb{N}$: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$" (Smole & Diniz, 2003, p.9). Percebemos que não é feita nenhuma elaboração teórica que associa os números naturais aos conjuntos. É feita apenas a descrição do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais como sendo $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$.

Concluindo o tópico, o livro apresenta: "O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito e também um conjunto ordenado, já que, dados dois números naturais quaisquer, é sempre possível dizer se são iguais ou se um é menor ou maior que o outro" (Smole & Diniz, 2003, p.9). Notamos que as propriedades – infinito e ordenado – de $\mathbb{N}$ são descritas e não construídas, estando, portanto, de acordo como o esperado para uma abordagem elementar da Matemática, conforme apresentado por Tall (2002).

Neste livro didático, a descrição do conjunto $\mathbb{N}$ parte de um breve histórico dos números naturais, sugerindo que da criação destes números resultaria, imediatamente, o conjunto $\mathbb{N}$ dos

[2] Sobre esta forma de se apresentar elementos históricos como acessórios ver o conceito de *história-crônica* em Miguel, A. e Miorim, M. A. (2005). *História na Educação Matemática:* propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica.

números naturais. É esta maneira simplificada de tratar o conceito em questão na matemática elementar que a difere da matemática avançada, de acordo com Tall (2002).

ii) Carvalho, M. S; Lopes, M. L. M. L. & Souza, J. C. M. (1984). *Fundamentação da Matemática Elementar.* Rio de Janeiro: Campus.

O oitavo capítulo do livro é dedicado ao estudo do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e se inicia com *Os cardinais e os números naturais* que traz um conceito anterior (apresentado no sétimo capítulo) de cardinal de um conjunto: o cardinal de um conjunto A é igual ao cardinal de outro conjunto B se, e somente se, A e B forem equipotentes, isto é, se for possível associar a cada elemento de A exatamente um elemento de B, e vice-versa. Com este conceito, é feito um estudo sobre os números naturais, associando-os aos conjuntos:

> (...) pode-se relacionar o critério mencionado de comparação de conjuntos com a contagem dos elementos de um conjunto; o que permite que se estude $\mathbb{N}$ com apoio no que se sabe sobre conjuntos, constituindo, de uma certa forma, uma volta às origens; já que, primitivamente, a idéia de número natural estava associada à de coleção de objetos.
>
> (Carvalho; Lopes & Souza, 1894, p.98)

Segundo o livro, mais de uma elaboração teórica associando os números naturais aos conjuntos foi feita, preservando as propriedades que correspondem à ideia que usualmente fazemos de $\mathbb{N}$. Em seguida, os autores afirmam que as diferentes abordagens matemáticas para a construção do conjunto dos números naturais podem se enquadrar em dois tipos específicos:

> Descrever $\mathbb{N}$ através de conjuntos e, pelas propriedades desses, deduzir as propriedades de $\mathbb{N}$, e introduzir as operações fundamentais.
>
> Admitir diretamente a existência de um conjunto $\mathbb{N}$ com propriedades descritivas, como nos axiomas de Peano, por exemplo, ou mesmo a existência de um conjunto $\mathbb{N}$ com $+$, $\leq$ e suas propriedades.
>
> (Carvalho; Lopes & Souza, 1984, p.99)

Estas duas formas de construção do conjunto $\mathbb{N}$ são apresentadas também por Millies e Coelho (2001): a primeira delas utiliza-se da teoria cardinal, em que a cada número natural é associado o cardinal do conjunto, enquanto a segunda delas utiliza-se da teoria ordinal, na qual os números naturais podem ser ordenados em uma sequência na qual cada elemento tem um sucessor bem definido.

Esta construção do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais está de acordo com o que dissemos anteriormente: não é suficiente que se tenha apenas a ideia dos números naturais, é necessário construí-los. Nestas diferentes abordagens matemáticas sobre a construção do conjunto - em ambas - as propriedades dos objetos matemáticos são deduzidas a partir das definições formais, o que caracteriza o pensamento matemático avançado para Tall (2002).

É feita, em seguida, a associação dos números naturais aos cardinais. Parte-se do pressuposto, consequência de um axioma, que existe o conjunto vazio, representado por $\emptyset$, que não possui elemento algum.

$$0 = card\ \emptyset$$

Desta forma, o cardinal do conjunto vazio é definido por 0.

Representaremos por 0^+ o sucessor do 0. Este será o 1, que é o cardinal do conjunto que contém apenas o 0 (definido anteriormente).

$$1 = 0^+ = (card\ 0)^+ = card\ \{0\}$$

Da mesma forma definimos o 2, como sendo o sucessor do 1 (definido anteriormente) e sendo o cardinal do conjunto que contém o 0 e o 1.

$$2 = 1^+ = (card\ \{0\})^+ = card\ \{0; 1\}$$

E assim sucessivamente.

$$3 = 2^+ = (card\ \{0; 1\})^+ = card\ \{0; 1; 2\}$$

Assim, qualquer outro número natural pode ser escrito como foi feito com os números 1, 2 e 3. Isso quer dizer que:

> a) Todo cardinal obtido sob a forma indicada é um número natural.
> b) Todo número natural pode ser escrito sob a forma indicada.
> c) Existe um conjunto $\mathbb{N}$ tal que:
> A_1 : $0 \in \mathbb{N}$
> A_2 : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n^+ \in \mathbb{N}$
> A_3 : Se 0 pertence ao subconjunto S de $\mathbb{N}$, e se $\forall\, s \in S$ se tem $s^+ \in S$, então $S = \mathbb{N}$,
> (Propriedade conhecida como o “princípio da indução finita”, ou “princípio da recorrência”, ou “princípio da indução matemática”.)
> Podemos, então, demonstrar que:
> A_4 : $0 \neq n^+, \forall n \in \mathbb{N}$
> A_5 : $\mathbb{N}$é totalmente ordenado pela ordem induzida em $\mathbb{N}$, através do conceito de $cardA \leq cardB$.
> A_6 : $\mathbb{N}$ é “bem ordenado”, o que quer dizer que todo subconjunto S de $\mathbb{N}$ tem um elemento a tal que $a < s, \forall s \in S$.
> A_7 :Se $x \in X$ e $y \in Y$ forem tais que $x^+ = y^+$, então $x = y$.
>
> As propriedades $A_1, A_2, A_3\ (ou\ A_6), A_4, A_7$, são os axiomas de Peano, básicos em Matemática, já que deles deriva a construção de $\mathbb{N}$ e, consequentemente, os dos outros conjuntos numéricos.
>
> (Carvalho; Lopes & Souza, 1984, p.99)

Nesta construção apresentada no livro de ensino superior fica evidente a diferença entre uma abordagem que se utiliza do pensamento matemático elementar, com a simples descrição dos elementos matemáticos, e esta, que é a transição para o pensamento matemático avançado. Os objetos deixam de ser descritos e passam a ser definidos e deduções são feitas a partir destas definições.

A seguir, o livro apresenta (ou pede na forma de exercícios para que o leitor faça) demonstrações de algumas propriedades, baseadas no que foi visto sobre conjuntos e na relação de $\mathbb{N}$ com os cardinais. Entre estas propriedades estão a demonstração de que $\mathbb{N}$ é um conjunto totalmente ordenado e a infinidade de números naturais, isto é, que o conjunto dos números naturais é infinito.

Em seguida, as operações em $\mathbb{N}$ são definidas:

- Adição em $\mathbb{N}$

Definida como a relação:

$S : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, tal que

$S : (a \times b) \to card(A \cup B)$

Representamos por $a + b$ o cardinal de $A \cup B$

- Multiplicação em $\mathbb{N}$

Definição:

Sejam a e b dois números naturais, e A e B dois conjuntos tais que:

$a = cardA$ e $b = cardB$

Definimos como multiplicação de a por b, a relação:

$p : (a, b) \to card(A \times B)$

Representamos $card(A \times B)$ por a x b, ou por $a.b$, ou ainda por ab.

- Subtração em $\mathbb{N}$

Definição:

Se a e b forem dois números naturais, podemos afirmar que, se $a \geq b$, existem dois conjuntos A e B tais que $cardA = a$, $cardB = b$, e existe uma injeção de B em A. Por exemplo, S_a e S_b[3].

Indiquemos com f essa injeção, e façamos $B' = f(B)$. Temos então $B' \subset A$. Definimos agora a relação $S : (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, como:

$S : (a, b) \to card(A - B')$

(Carvalho; Lopes & Souza, 1894, p.102-104)

A divisão em $\mathbb{N}$ fica como exercício para o leitor.

Com isso, mostramos que este livro está de acordo com a matemática avançada, pois para Tall (2002), na matemática avançada as propriedades dos objetos matemáticos são entidades abstratas construídas a partir de deduções das definições formais.

Conclusão

Da apreciação dos livros didáticos, a qual não visava verificar a qualidade dos mesmos, pudemos verificar a diferença na maneira de tratar um mesmo conceito matemático. Considerando o livro didático como uma componente no processo de ensino e aprendizagem, concluímos que a transição curricular é incontestável: poucos anos separam o momento em que o estudante se depara com uma abordagem e com outra. Uma se dá no Ensino Médio e outra em disciplinas introdutórias de cursos de Matemática, isto é, no início da graduação.

É importante dizer que não pretendemos de forma alguma sugerir que devem ser ensinadas construções ou demonstrações matemáticas no Ensino Médio. Nosso objetivo é apenas mostrar que a diferença da maneira de tratar os objetos matemáticos nos diferentes momentos pode ser

[3] Em que $S_a = \{x \in \mathbb{N} / \ x < a\}$ e $S_b = \{x \in \mathbb{N} / \ x < b\}$.

um agravante para o alto número de evasão de estudantes em cursos de graduação em Matemática, uma vez que estes não estão acostumados com o formalismo e a abstração da matemática avançada.

Com relação às teorias do pensamento matemático elementar e o avançado, devemos dizer que vão muito além do que apresentamos neste artigo. Atentamo-nos na distinção que David Tall faz entre o tratamento dos objetos matemáticos na matemática elementar e na matemática avançada. Porém, tanto Tall como Dreyfus e outros pesquisadores desenvolvem teorias do pensamento matemático em uma perspectiva cognitivista, ou seja, como os estudantes tratam e entendem os objetos e não apenas como estes são apresentados.

Referências

Adachi, A. A. C. T. (2007). A evasão na UFMG. *Encontro Nacional da Abrapso*, Rio de Janeiro, 14.

Arruda, S. M.; Carvalho, M. A.; Passos, M. M. & Silveira, F. L. (2006). Dados comparativos sobre a evasão em Física, Matemática, Química e Biologia da Universidade Estadual de Londrina: 1996 a 2004. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, *23*(3), 418-438.

Bianchi, M. I. Z. (2006). *Uma Reflexão Sobre a Presença da História da Matemática nos Livros Didáticos.* 2006. 103 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Brandemberg, J. C. (2010). *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

Brasil. Secretaria de Educação Básica. (2008). *Matemática*: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009. Brasília: Ministério da Educação.

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Carvalho, M. S; Lopes, M. L. M. L. & Souza, J. C. M. (1984). *Fundamentação da Matemática Elementar.* Rio de Janeiro: Campus.

Domingos, A. (2006). *Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados*. Artigo apresentado no XVII Seminário de Investigação em Educação Matemática, Setúbal.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In: David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinkin* (pp.25-34). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lima, E. L. (1982). Conceitos e controvérsias. *Revista do Professor de Matemática*, *1*, 5-8.

Millies, F. C. P. & Coelho, S. P. (2001). *Números*: uma introdução à Matemática. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Schubring, G. (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática:* notas de aula. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas: Autores Associados.

Smole, K. S. & Diniz, M. I. (2003). *Matemática Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Paraná. (2002). *Documento Síntese do I Fórum Estadual dos Cursos de Licenciatura em Matemática do Paraná* . Londrina, Universidade Estadual de Londrina. Disponível em: <http://www.unimeo.com.br/ixeprem/I_FELIMAT_texto.doc>. Acesso em 15 de março de 2011.

Souza, J. R. (2008). *Processo seletivo estendido na UFPR: um mergulho na experiência do curso de Matemática*. Tese de doutorado, setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Brasil.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, 61-75.

Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In: David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.