ENSINO DO CÁLCULO INFINITESIMAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA: REFLEXÕES COM BASE PRÁTICA

Ronaldo Barros Orfão
Universidade Bandeirante-Uniban
Brasil
ronaldobarros63@hotmail.com
Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Bandeirante-Uniban
Brasil
nielcelobo@uol.com.br
Janete Bolite Frant
Universidade Bandeirante-Uniban
Brasil
janetebf@gmail.com

Resumo

Nesta comunicação de experiência apresentamos reflexões sobre o ensino de algumas idéias básicas do Cálculo Infinitesimal, em particular do conceito limite, quando desenvolvido em aulas de Matemática da Educação Básica. Apresentamos um breve histórico da evolução do conceito de limite, desde a Grécia antiga até o movimento Iluminista na Europa, quando este tomou a forma atual e discutimos a definição de limite contida em livro didático. Na sequência, a experiência de ensino que desenvolve conteúdos do currículo da Educação Básica, tratadas na visão de Cálculo é discutida. A abordagem do conceito de limite incluiu sua evolução na história e três atividades, respectivamente uma soma infinita, a área do círculo, velocidade e aceleração. A conclusão, a partir da prática, foi pela validade da realização da experiência didática, por auxiliar os alunos a iniciar a construção do conceito de limite e de infinito, tendo uma visão de Cálculo Infinitesimal desde o Ensino Fundamental.

Palavras - chave: Limite, Cálculo Infinitesimal, Ensino de Matemática.

Introdução

Nesta comunicação de experiência apresentamos reflexões sobre as conjecturas, levantamento de hipóteses, investigações e demonstrações que podem ser desenvolvidas em aulas de Matemática da Educação Básica envolvendo algumas idéias básicas do Calculo Infinitesimal. Em particular analisamos a metodologia que temos utilizado, nos últimos três anos, nas discussões em sala de aula.

Iniciamos com um breve histórico da noção de limite e da evolução desse conceito desde a Grécia antiga até o movimento Iluminista na Europa no final do século XVIII e início do XIX, quando esse conceito se constituiu como o conhecemos hoje. Na sequencia discutimos a definição de limite em livro didático atual para o Ensino Superior, no qual o conceito é abordado. Relatamos, então, a experiência didática envolvendo a noção de limite, composta por duas atividades e desenvolvida no Ensino Fundamental e Médio. Finalizando apresentamos nossas reflexões e tecemos as conclusões.

Diversos dos conceitos básicos do cálculo diferencial tais como: continuidade, derivada, integral, séries (divergência ou convergência) são desenvolvidos a partir do conceito de limite. Consideramos, então, que o conceito de limite é central e, assim sendo, poderíamos pensar que ele surgiu antes dos outros, mas na história não foi assim. A noção de limite era tratada de maneira vaga e, algumas vezes, filosófica, por exemplo, com o uso da noção de infinitésimos[1].

A primeira vez de que se tem registro do surgimento da ideia de limite foi no século IV a.C., quando o filósofo Zenão de Eléia apresentou um paradoxo evidenciando a dificuldade existente na época em se utilizar o conceito de infinito. Segundo Maor (2008):

> Para que um corredor possa mover-se do ponto A para o ponto B, ele precisa alcançar primeiro o ponto médio da distância AB, então o ponto médio da distância remanescente e assim por diante até o infinito e como esse processo exige um número infinito de passos, argumentava Zenão, o corredor nunca alcançará seu destino. (p. 68)

Isto significa dizer que, usando o conceito de limite e estabelecendo como unidade a medida AB, a distância a ser percorrida pelo corredor pode ser calculada pela soma da série geométrica:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ldots=$$

Esta série tem a propriedade de convergir para 1, ou seja, não importa quantos termos se acrescente à soma, ela nunca excederá 1. Estará cada vez mais próxima de 1 sem nunca ultrapassar esse valor. Assim sendo, concluímos que a soma é 1.

Na época da Grécia Antiga, para determinar somas infinitas, Arquimedes, por exemplo, (287-212 a.C.) usava o método de exaustão para calcular tais somas. Ele não usou o termo "infinito", mas trabalhou com o conceito de limite. Em suas demonstrações, Arquimedes aplicava uma técnica chamada dupla redução ao absurdo. Ele pressupunha que comparando duas grandezas a e b, três as possibilidades coexistiam: $a>b$, $a<b$ ou $a=b$. Ao eliminar, por absurdo, duas dessas hipóteses, era possível concluir que a terceira delas era a verdadeira.

Exemplo 1: Demonstrar, por redução ao absurdo duplo, que são iguais a área do círculo de raio "r" e comprimento "c" e a área do triângulo retângulo de altura "r" e base "c", ou seja, $A_c=A_t$.(figura 1)

[1] Infinitésimo é um número maior que zero em valor absoluto, mas menor que qualquer número real positivo.

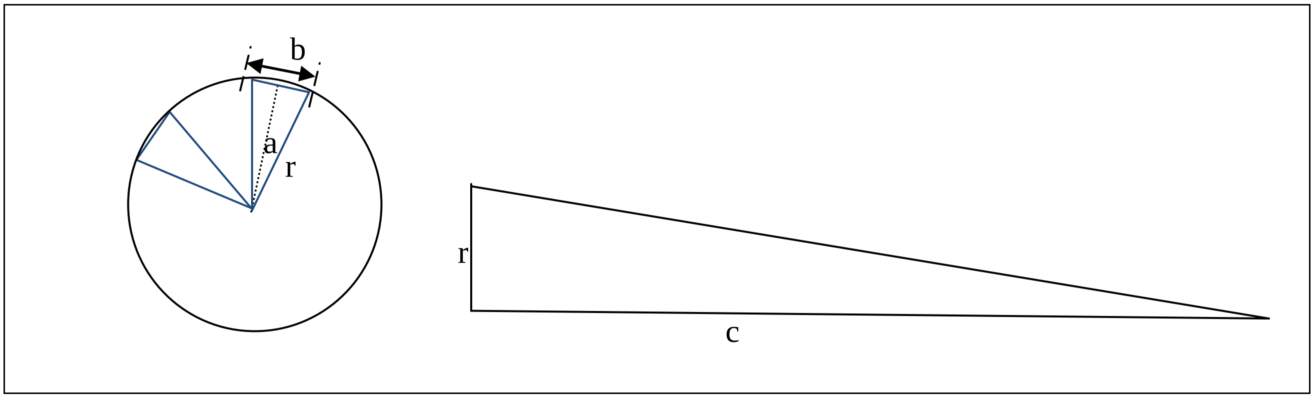


Figura 1. Ilustração da demonstração citada no exemplo 1

Considerando o polígono regular de "n" lados, inscrito na circunferência de raio "r", pode-se dividi-lo em "n" triângulos isósceles, onde "b" é a base do triângulo e "a", a altura.

Considerando S como sendo a área do polígono, tem-se:

$S=\frac{1}{2}.(b.a).n = \frac{1}{2}\ a\ .(b.n)$, sendo (b.n) o perímetro do polígono.

Seja A_c a área da circunferência e A_t a área do triângulo. A partir do método arquimediano temos três hipóteses: $A_c < A_t$ ou $A_c > A_t$ ou $A_c = A_t$. Analisando as duas primeiras:

1º Hipótese: $A_c < A_t$

Se $A_c < A_t$ então existe, um ε tal que a diferença entre suas áreas é:

$A_c = A_t + ε$, mas isto é um absurdo, pois a altura do triângulo é igual ao raio (apótema do polígono inscrito na circunferência) e a base do triângulo é igual ao comprimento da circunferência.

2º Hipótese:

Se $A_c > A_t$ então existe, um ε tal que a diferença entre suas áreas é:

$A_t = A_c + ε$, que também é um absurdo pelo mesmo motivo.

Como A_t não pode ser maior e nem menor a A_c, só resta ser igual.Então: $A_t = A_c$

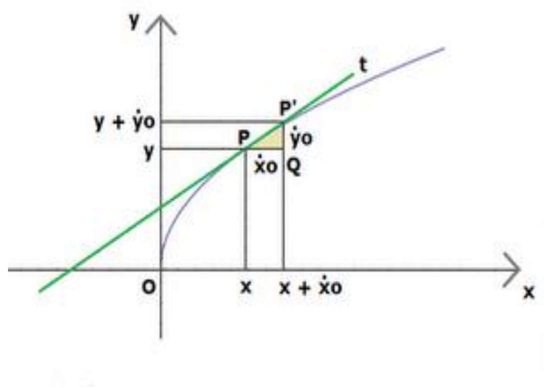
Lembrando que nesta época, não o valor do π não era conhecido, mas sabia-se que a área e o comprimento de uma circunferência eram grandezas proporcionais, mas desconhecia-se o coeficiente de proporcionalidade. Hoje sabemos que esta constante é o π, Arquimedes usava o valor dessa constante (π) como sendo: $3\ \frac{10}{71} < \pi < 3\ \frac{1}{7}$

O próximo expoente nesta área surgiu vários séculos depois, na figura de Newton (1642-1727) que, em quase todos os seus trabalhos – agora considerados como de Cálculo – também não aplicava o conceito de limite, mas usava os método das fluxões.

Dois problemas preocupavam os matemáticos nessa época:

1) A determinação da tangente a uma curva em um ponto dado;
2) O cálculo da área acima de um eixo e sob uma curva dada.

Newton percebeu que estes dois problemas poderiam ser tratados um como o inverso do outro. Para fundamentar seus métodos em bases sólidas, ele usou a mecânica e introduziu o tempo como variável universal



x e y são as quantidades fluentes
$(\dot{x}_o, \dot{y}_o)$ são as fluxões das fluentes (x,y)
“o” é um infinitésimo

O que chamamos de “função” Newton chamava de “fluir”, fluem variáveis.

Figura 2. Ilustração das Fluxões em um tratamento na visão atual.

Newton usava o método das fluxões. Um exemplo desse método:

Determine $\dot{y}/\dot{x}$ a curva y = x ^{2} no ponto (x,y)
Substituindo (x,y) por: ($x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$), temos:

$y+\dot{y}o$=($x+\dot{x}o$)^2, desenvolvendo o 2º membro:

$y+\dot{y}o$= x^2 +2x $\dot{x}o$ + $\dot{x}o$ ^{2} , $\dot{x}o$ é infinitamente pequeno, $\dot{x}o^2$ é menor ainda portanto desprezível, considerando o incremento igual a zero e subtraindo a função y = x^2, temos:

$\dot{y}o$ =2x $\dot{x}o$, dividindo esta expressão por: $\dot{x}o$, resulta: $\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}$ = 2x.

Usando o conceito de limite e refazendo o mesmo exemplo temos:

$$f'(x) = \lim_{x \to \Delta x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{x \to \Delta x} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{x \to \Delta x} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$f'(x) = 2x$$

Segundo Boyer (1974), uma tentativa para definir limite aparece na obra *Principia Mathematica* de Newton, na passagem:

> Quantidades, e as razões de quantidades, as quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para a igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final. (p. 292)

Esse é um indício no caminho da história da matemática, para abandonar os infinitésimos, e formular uma definição formal do limite de uma função.

A próxima contribuição relevante foi a de D'Alembert ao perceber a teoria de limites como sendo uma ferramenta para a formalização e rigor do Cálculo. Na ocasião investigava-se uma teoria do *"infinitamente pequeno"* e do *"infinitamente grande"*, que poderia embasar o Cálculo. Boyer (1974) explica que D'Alembert empreendeu outra tentativa para definir o limite no artigo sobre "diferencial" que ele escreveu para a *Encyclopédie*, no qual afirma que:

> ...a diferenciação de equações consiste simplesmente em achar os limites da razão de diferenças de duas variáveis contidas na equação... , p. 331).

Segundo Eves (2004) D'Alembert, explicitou a necessidade de desenvolvimento de uma teoria bem estruturada de limites para consolidar os fundamentos da Análise

Nesse campo coube a Weierstrass, já no século XIX, o desenvolvimento dessa teoria, no caso, feita entre 1815 e1897, período em que ele lecionava no Ensino Secundário. Weierstrass determinou a primeira etapa da definição formal de limite usando apenas valores absolutos e desigualdades. Sua exposição é exatamente a que encontramos nos livros atuais de Cálculo do curso superior, com a substituição da letra η por δ.

Se dado qualquer ε, existe um no tal que $0 < \eta < \eta_o$ a diferença $f(x_o \pm \eta) - L$, é menor em valor absoluto que ε , então L é o limite de $f(x)$ para $x = x_o$

A definição de limite em livros didáticos atuais, tais como Guidorizzi (1985, p.73) é:

Dado um $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (δ dependendo de ε), tal que, para todo $x \epsilon Df$ $p - \delta < x < p + \delta \rightarrow f(x) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$

Esta definição, por ser técnica e abstrata, pode ser a principio, de difícil compreensão para estudantes que, por ventura, desconheçam seu contexto histórico.

Partindo da hipótese que os conceitos do Cálculo possam ser trabalhados na Educação Básica sem, contudo usar de todo o rigor – por exemplo, evitar mencionar os epsons e deltas (ε, δ), da definição de limite – cremos que uma possibilidade, nesse nível de ensino de Matemática, é trabalhar de forma intuitiva, sem abandonar completamente o rigor, como discutimos na sequência de ensino proposta abaixo. Consideramos que, dessa forma, pode-se dar continuidade aos estudos de limites no curso superior, minimizando as dificuldades encontradas pelos alunos nos cursos de Cálculo I e II. Segundo Barufi, (1999):

> (...) considerando que no curso secundário, a maioria dos alunos não trabalhou com nenhuma das noções de Cálculo, e que os novos conceitos lhe são apresentados segundo a uma abordagem que esta muito pouco relacionada com a maneira pela qual o Cálculo foi sendo historicamente estruturado (p.5)

Acreditamos ser importante apresentar aos alunos da Educação Básica – levando em consideração a faixa etária e o conhecimento prévio uma visão geral da evolução histórica do conceito de limite e também dos problemas vividos por matemáticos no passado, para que os discentes conheçam de que maneira foram sendo elaborados tais conceitos com os quais terão contato no ambiente escolar.

A experiência de ensino

A experiência foi composta por três atividades, descritas a seguir.

Atividade 1

O problema abaixo foi apresentado aos alunos do 5º ano, em uma aula de 50 minutos (faixa etária 11 anos) de uma escola pública estadual de educação básica, em Suzano-SP. Essa atividade foi inspirada em situação descrita em palestra de Barco (1997).

O objetivo em sala de aula foi o de identificar o modo de enfrentamento de uma situação problema envolvendo limite. Ao se deparar com uma soma infinita de termos de uma sequência, quais os tratamentos dariam ao o Infinito, uma vez que já haviam trabalhado com adição e subtração de frações.

A mesma atividade foi apresentada a alunos do 3º ano do ensino médio, com o propósito de explorar somas infinitas, e o conceito de limite de uma soma, visto que os alunos já haviam trabalhado com P.G.

O desenvolvimento da atividade se deu utilizando o método dialogado, isto é, por meio de um dialogo com a classe foi apresentada a seguinte situação problema aos alunos:

Suponha que três amigos vão a uma pizzaria, pedem uma pizza e combinam que todos comerão a mesma quantidade de pizza. O garçom cortou a pizza em 4 partes, serviu um pedaço para cada um. O pedaço que restou foi dividido novamente em quatro e assim por diante... (figura 2)

Pergunta-se: Ao todo, qual a fração da pizza cada amigo comeu?

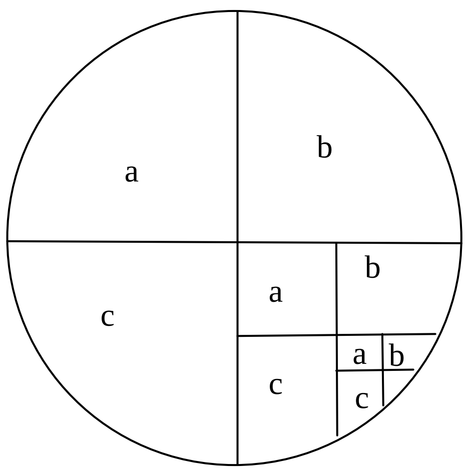


Figura 3. Proposta de situação-problema da Atividade 1

Os alunos foram orientados para se organizarem em dupla para resolver o problema.

Perguntando às duplas qual a resolução, surgiam diversas ideias, tais como as seguintes:

1. *Não dá para calcular*
2. *Esse tipo de divisão não existe de verdade*
3. *O que é ¼ de ¼?*

4. A soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=??$ *Fornecerá a solução.*

Na sequencia discutimos com a classe cada uma das ideias e, em particular, como se chega a cada parcela da soma infinita acima.

De todo modo, concluímos que, nesse estágio, os alunos declararam que não sabiam fazer esse cálculo

É interessante observar que nesses três anos nos quais a sequencia tem sido desenvolvida com os alunos, tem surgido ao longo da discussão do problema, falas do tipo:

"...se temos 3 pessoas, por mais que se divida, cabe a cada um a quantia correspondente a 1/3 da pizza...!"

Mesmo a partir dessa observação percebemos que os alunos não ousavam escrever:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{1}{3}.$$

Ao final, era necessário escrever esse valor e, então, discutir a veracidade dessa resposta. Na verdade, o que constatamos pela prática docente, é que existe um obstáculo a transpor ao se trabalhar com o infinito.

Na atividade acima acreditamos que os alunos possam "enfrentar" o infinito com mais confiança, pois uma boa análise evidencia que esta série converge para 1/3.

Alunos do Ensino Médio (15 à 17 anos) costumam se mostrar mais "preocupados" em resolver a soma, do que em analisar a solução.

Vale a pena enfatizar que os alunos que já estudaram progressões geométricas, poderiam utilizar a fórmula da soma da P.G. convergente para resolver este problema. Contudo, poucos estabeleceram ligação entre essa soma e a fórmula mencionada.

Após essas discussões iniciais, para trabalhar a idéia do infinito, expusemos as primeiras ideias do Cálculo na história e mencionamos os grandes nomes da Matemática. Observamos que os alunos se mostraram muito surpresos e desafiados em procurar mais informações pertinentes ao tema. Isso ficou evidenciado quando, por exemplo, um dos alunos expôs o seguinte problema que havia pesquisado:

O "Hotel Infinito".
Considere um hotel hipotético com infinitos quartos, todos ocupados - isto é, todos os quartos contém um hóspede. Suponha que um novo hóspede chega e gostaria de se acomodar no hotel. Se o hotel tivesse apenas um número finito de quartos, então é claro que o requerimento não poderia ser cumprido, mas como o hotel possui um número infinito de quartos então se movermos o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante, podemos acomodar o novo hóspede no quarto 1, que agora está vago. Por um argumento análogo é possível alocar um número infinito (contável) de novos clientes: apenas mova o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, o hóspede do quarto 2 para o quarto 4, e em geral do quarto N para o quarto (2N), assim todos os quartos de número ímpar estarão livres para os novos hóspedes.
O paradoxo do Hotel de Hilbert é um fato matemático sobre conjuntos infinitos apresentado pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943). É chamado de paradoxo, o resultado é contra-intuitivo.

Quando o problema foi apresentado aos demais alunos, eles se sentiram motivados e participaram das discussões. Neste caso, aproveitamos para discutir os paradoxos que envolvem o infinito, tais como:

i) somar 1 ao infinito resulta o próprio infinito;

ii) infinito somado a infinito resulta o próprio infinito;

iii) elevar ao quadrado o infinito resulta em infinito,

iv) dividir infinito por infinito resulta em indeterminação.

Embora o conceito de infinito seja altamente significativo em matemática, inquestionável enquanto construção lógica, a sua realidade psicológica permanece inexplicável, complexa e contraditória, como diz Falk(1986)

> ...se questionou sobre o que significa compreender o infinito. Para a autora não o compreendemos nem sensorialmente nem por imaginação; o conhecimento surge do conflito entre a finitude do mundo à nossa volta e o conhecimento da "possibilidade" do infinito. Este é também um dos motivos para o fato dos conhecimentos matemáticos vinculados com o infinito e a sua operacionalização constituírem fonte de dificuldades e conflitos para os alunos.

Os erros mais frequentes que a autora pode identificar no seu estudo com jovens pré-universitários e a frequentar os primeiros anos dos seus cursos foram quanto à generalização dos processos operatórios finitos ao infinito e quanto à atribuição da mesma cardinalidade a todos os conjuntos infinitos.

Atividade 2: área do círculo

Na próxima atividade, nossa intenção era discutir empiricamente o que significa dizer um número tender a zero. Para tanto desenvolvemos uma experiência utilizando um rolo de papel higiênico e uma fita crepe. O procedimento foi o seguinte: colamos uma das extremidades, cortamos a outra para separar as folhas – de maneira a dar uma aparência de trapézio –, mantivemos a parte central intacta, para melhor manipulação do rolo, transformando ora em circulo ora em trapézio, (figura 3).

Esta atividade foi adaptada de Bastos, W.D. e Silva, A.F. (1999) publicada na Revista do Professor de Matemática RPM, N^0 40 (p.42)

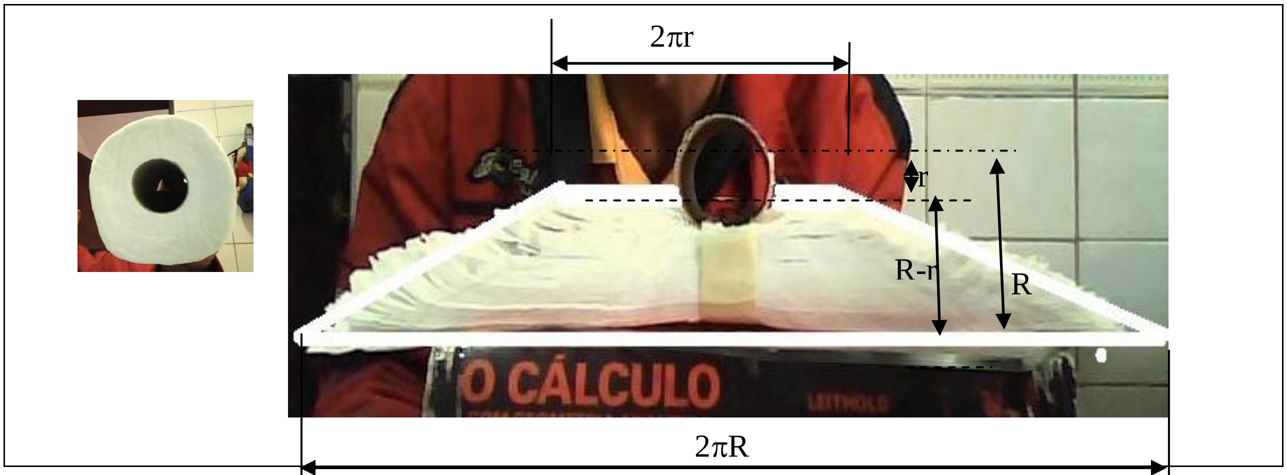


Figura 4. Ilustração da Atividade 2

Propusemos aos alunos a seguinte questão

Como explicar a formula da área do circulo $A = \pi r^2$?

Pela concretização feita, era possível visualizar um trapézio, cuja área calcula-se por: $A=\frac{(B+b).h}{2}$. Neste caso temos $B=2\pi R$, $b=2\pi r$, $h= R-r$,

De modo que quando r tende a zero a altura do trapézio é igual a R, ou seja, em termos de limite temos:

$$\lim_{r \to 0} \frac{(2\pi R - 2\cancelto{0}{\pi r}).(\cancelto{0}{R}-r)}{2}$$

O que leva à conclusão de que: $A= \frac{2\pi R^2}{2} \rightarrow A=\pi R^2$

Atividade 3: velocidade e aceleração

Consideramos que, no estudo de cinemática, para discutir velocidade instantânea e aceleração deparamos com o conceito de limite, contudo muitas vezes não se dá importância ao detalhamento desse conceito, partindo-se do pressuposto que o aluno não pode assimilar de forma intuitiva este conceito, especialmente no Ensino Fundamental.

Velocidade média, por definição, é o quociente entre o espaço percorrido pelo tempo gasto.

$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (ΔS diferença do espaço percorrido, Δt diferença do tempo gasto)

Considerando Δt muito pequeno, isto é, Δt tendendo a zero, a diferença de tempo é muito pequena (tão pequena quanto se queira). No caso trata-se da velocidade instantânea, dada por:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Aceleração média, por definição é o quociente da velocidade pelo tempo gasto, ou seja, a = $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ (ΔV diferença da velocidade, Δt diferença do tempo gasto).

Considerando Δt muito pequeno, isto é, Δt tendendo a zero, a diferença de tempo é muito pequena (tão pequena quanto se queira). No caso, trata-se da aceleração naquele instante:, dada por: a = $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$

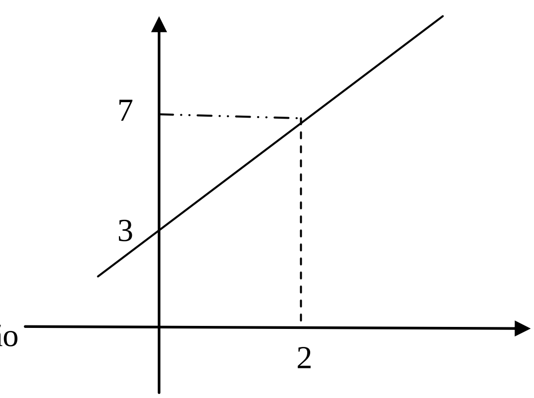
No estudo de funções, conteúdo do 2º bimestre no 1º ano do ensino médio, e no de geometria analítica no 3º ano, frequentemente há interesse em encontrar valores de uma função, quando x está muito próximo de um número α, mas não necessariamente definida em α. Quando x se aproxima de α (x≠ α), f(x) fica próximo a um número L. Se este número existir, então o limite de f(x), quando x tende para a f(x) é L, e representa-se: $\lim_{x \to \alpha} f(x)$

Exemplo: Seja f: $\Re \to \Re$ tal que f(x) = 2x+3. O $\lim_{x \to 2} f(x)$ = f(2) = 7

Observa-se que:

(x)		*f(x)*		(x)	*f(x)*
1,9	=	6,8		2,3	7,6
1,99	=	6,98		2,2	7,4
1,999	=	6,998		2,1	7,2
1,9999	=	6,9998		2,0001	7,0002
1,99999	=	6,99998		2,00001	7,00002

f (2) = 7



Quanto mais a variável x se aproxima de 2 mais a função se aproxima de 7 .

Outro exemplo:

y = f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$, (não faz sentido falar em *f*(1))?

quando x → 1, escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \text{, (indeterminado)}$$

Fatorando: $x^2 - 1 = (x-1).(x+1)$
Portanto,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

Obs. quando x se aproxima de 1 a função se aproxima de 2.

3º Exemplo: Quando estudamos polinômios no 3º ano, é possível discutir com os alunos que se o polinômio *f*(x) tem grau ímpar, obrigatoriamente ele possui pelo menos uma raiz real.

Sendo $f(x)=x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}.....x^0$ e usando o conceito de limite, calcula-se o limite quando x tende a - ∞ e quando x tende a +∞, então:

$$.\lim_{x\to-\infty} P(x)= x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}.....x^0$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x)= x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}.....x^0 = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} P(x)= x^{2n+1}+x^{2n}+x^{2n-1}.....x^0 =+\infty$$

Pelo teorema de Bolzano[2] *f (x)* admite pelo menos uma raiz real.

Conclusão

A experiência citada neste texto aborda conteúdos do currículo escolar da Educação Básica que foram tratadas com uma visão do Cálculo procurando auxiliar aos alunos a iniciar a construção do conceito de limite e de infinito. Ao citar autores e matemáticos célebres observamos que alguns alunos se sentiram motivados em buscar literatura e contribuíram no desenvolvimento das aulas.

Concordamos com Ávila (1991) quando ele diz que:

> (...) o Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino *é* grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da Matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (RPM Nº 18 p.3)

O mesmo autor enfatiza a importância de que a Educação Básica auxilie a integrar o aluno à sociedade em que ele vive e, nesse sentido afirma que:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2.° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas idéias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. (Ávila, ibid, p. 3)

Além disso, pesquisadores tais como Barufi (1999) e Resende (2003), em suas teses de doutorado, alertam e buscam alternativas para minimizar o alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo. Tais pesquisadores apontaram como sendo um dos fatores que influenciam tais índices de reprovação a falta de ligação entre o que se estuda no Ensino Básico e no Ensino Superior.

---

[2]Teorema de Bolzano: *Se f for contínua no intervalo fechado [a,b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em [a,b] tal que f(c)=0*

Assim sendo, finalizamos justificando a importância de realizar experiências de ensino como a aqui exposta no sentido de auxiliar a construir uma visão do Cálculo Infinitesimal desde os anos iniciais do Ensino Fundamental II.

Bibliografia e referências

Bastos, W.D. e Silva, A.F. (1999) A área do círculo. In: Revista do Professor de Matemática, Nº 40, Ed: Sociedade Brasileira de Matemática

Barco, L. (1997) "A Cidadania Também se Constrói na Escola". Palestra no 1º Congresso Regional de Educação da Universidade Braz Cubas (UBC).

Barufi, M. C. B. A,(1999) Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

Boyer, C. B. (1974). História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide, São Paulo, Editora Edgard Blucher , 7º Edição

Flemming, D. M.,(1992) Cálculo A: funções Limite, Derivação, integração 5ª edição, São Paulo, Editora Makron

Eves, H.(2004) Introdução a História da Matemática; Tradução Hygino H. Domingues, Editora da Unicamp, , 3º edição.

Ávila, G. (1991). O Ensino de Cálculo no 2.°grau,Revista do Professor de Matemática, Nº18, Ed: Sociedade Brasileira de Matemática

Guidorizzi, H. L. (1985). Um Curso de Cálculo, volume I – Rio de Janeiro: Editora LTC- Livros Técnicos e Científicos, , 1º edição.

Garbi, G. G,(2007) A Rainha das Ciências; um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática- 2º edição, São Paulo: Editora e livraria da Física, Diniz G L.

Maor E(2008), A História de um número: e, tradução Jorge Calife; 4º edição – Rio de Janeiro,

Nogueira D. & Mendonça P. P. M.,(1984) Análise Matemática: Introdução- Rio de Janeiro: FAE (Fundação de Assistência ao Estudante), 3ª edição.

Rezende, W M O (2003) Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica, Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/frame.htm, acesso em 08 /01/ 2011.